www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

MATHEMATIQUES 1ère épreuve (option économique)

Coefficient 4 *Mardi 16 mai 1989 de 14 heures à 18 heures*

Nota : – Les quatre exercices sont indépendants.

IN désigne l'ensemble des entiers naturels, et IR celui des nombres réels.

EXERCICE 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et l'endomorphisme f de IR^3 dont la matrice est A relativement à la base canonique de IR^3.

1. a) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.

   b) Déterminer une base et la dimension de l'image de f.

2. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f ; f est-il diagonalisable ?

3. Calculer A^n pour tout n de IN^*.

4. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Déterminer tous les réels x tels que $(A - xI)^2 = I$.

   b) Existe-t-il un réel x tel que $(A - xI)^3 = I$?

EXERCICE 2

Soit f la fonction de IR dans IR définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$

On note I l'ensemble de définition de f, et C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. a) Étudier les variations de f. Préciser les tangentes à C aux points d'abscisses 0 et 1.

   b) Démontrer que, pour tout x de I, $f(x) \geqslant x$; pour quels x a-t-on l'égalité ?

   c) Tracer C et la droite D d'équation $y = x$ dans le repère $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$.

2. a) Démontrer que f réalise une bijection de $[0, 2[$ dans $[0, +\infty[$.

   b) Expliciter la fonction réciproque f^{-1} de f, et tracer la courbe représentative C' de f^{-1} dans le repère $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$.

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in IN, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   a) Montrer : $\forall n \in IN, u_n \in [0, 1]$.

   b) Prouver que $(u_n)_{n \in IN}$ est croissante.

   c) Démontrer que $(u_n)_{n \in IN}$ converge, et déterminer sa limite.

TSVP

EXERCICE 3

Soit un nombre réel α. On considère la fonction f définie sur IR par :

$f(x) = \alpha 2^x$ si $x < 0$.

$f(x) = \alpha 2^{-x}$ si $x \geqslant 0$.

1. Déterminer α pour que f soit la densité d'une variable aléatoire X à valeurs réelles.

   Dans la suite de l'exercice on prend $\alpha = \frac{1}{2}\ln 2$.

2. a) Calculer, si elle existe, l'espérance de X.

   Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

   Tracer la courbe représentative de F.

   b) Soit un nombre réel x. Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement $(X < x)$ sachant que l'événement $(X \geqslant -1)$ est réalisé.

3. Déterminer la fonction de répartition G de la variable aléatoire $Y = 2^{\frac{X}{2}}$.

EXERCICE 4

Soit I la suite de terme général $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

1. a) Calculer I_0 et I_1.

   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

   Étudier la convergence de la suite I.

2. **Calcul d'une valeur approchée de I_{15}.**

   Soit p un entier strictement positif.

   a) Montrer que, pour tout entier naturel n,

   $$I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}$$

   et

   $$I_n = \frac{n!}{e} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)!} + \frac{n!}{(n+p)!} I_{n+p}.$$

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n,

   $$0 \leqslant I_n - \frac{n!}{e} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)!} \leqslant \frac{n!}{(n+p+1)!} \leqslant \left(\frac{1}{n+1}\right)^{p+1}.$$

   c) Comment peut-on choisir p pour que

   $$0 \leqslant I_{15} - \frac{15!}{e} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(15+k)!} < 10^{-6} ?$$

   En déduire à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-6} près de I_{15}.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail